

Análisis de Observabilidad Global del Motor de Reluctancia Conmutada

Isaí Pacheco-Tejeda

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
ipacheco@comunidad.unam.mx

Paul R. Maya-Ortiz

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
paulm@dctrl.fi-b.unam.mx

Resumen—En este trabajo se presenta un análisis que permite demostrar las propiedades de observabilidad global del motor de reluctancia conmutada considerando que la velocidad angular del rotor no está disponible para medición. Este análisis se realiza utilizando los conceptos básicos de indistinguibilidad y observabilidad de trayectorias de estado de los sistemas dinámicos y haciendo uso de la metodología de comparación de modelos idénticos de sistemas dinámicos iguales, con la finalidad de obtener una dinámica de error que revele la posibilidad de observación, obteniendo resultados satisfactorios con la finalidad de obtener una dinámica del error que permita adquirir información sobre la observabilidad de la máquina.

Palabras clave: Indistinguibilidad, observabilidad, motor de reluctancia conmutada.

I. INTRODUCCIÓN

El motor de reluctancia conmutada (SRM, Switched Reluctance Motor) es una máquina eléctrica diseñada para obtener gran eficiencia en la conversión de energía. Debido a que su construcción no requiere de imanes permanentes o devanados en el rotor este motor es de bajo costo y de alta fiabilidad. Si se diseña con varios polos es posible obtener un par elevado a bajas velocidades excluyendo así el uso de engranajes lo que le hace buen candidato para aplicaciones de transmisión directa (Krishnan, 2001).

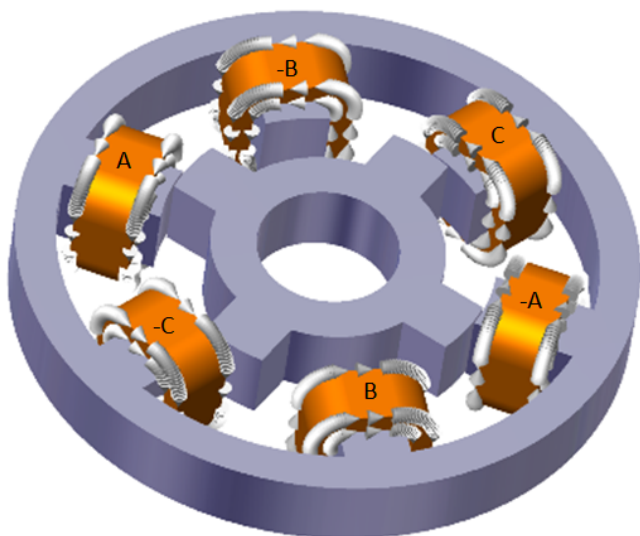


Figura 1. SRM trifásico con 6 polos de estator y 4 de rotor

Con el objetivo de reducir los costos de mantenimiento e infraestructura en este tipo de máquinas es deseable el uso

de esquemas de control que no requieran del conocimiento de todas las variables. Como esta situación no siempre puede ocurrir se hace uso de esquemas de estimación de estados para recuperar variables. Además, con este tipo de estrategias es posible trabajar en situaciones donde el motor es sometido a condiciones ambientales extremas tales como alta presión, humedad, temperatura y velocidades extremadamente altas; el uso de un sensor mecánico puede conducir a problemas de fiabilidad y robustez los cuales son precisos para este tipo de aplicaciones (Miller, 2001). Antes de realizar el diseño de un observador es recomendable llevar a cabo el análisis de observabilidad que permita concluir la viabilidad del diseño e identificar, de haberlos, comportamientos indistinguibles. Con respecto al diseño de observadores para el SRM existen diferentes propuestas reportadas en la literatura científica. Por ejemplo, en (Ehsani y Fahimi, 2002) se presenta una pequeña colección de trabajos de control sin sensores mecánicos reportados en la década de los 90 y principios del 2000 que pueden ser clasificados como: 1) métodos hardware-intensivos los cuales requieren circuitería externa para la inyección de señal, 2) métodos dato-intensivos tales como la técnica de flujo que integra una gran colección de tablas de almacenamiento de características del SRM y 3) métodos basados en modelo tales como los observadores de estado, el método de medición de señal de potencia, el método basado en el modelo de inductancia, redes neuronales y lógica difusa, entre otros, los cuales necesitan un microprocesador potente como un procesador digital de señales con capacidad de procesamiento de millones de instrucciones por segundo (MIPS).

En (Gao *et al.*, 2004) y (Komatsuzaki *et al.*, 2008) se reportan métodos de estimación de posición, la suposición principal es que el motor trabaja a bajas velocidades por lo que la fuerza contraelectromotriz puede despreciarse, bajo esta suposición se puede obtener una relación directa de las inductancias, único término que depende de la posición, lo que hace posible una igualdad y una estimación de variable que resulta en función de una tangente.

En (Tan *et al.*, 2009) se reporta un estimador de posición y un observador por modos deslizantes cuyo principal problema es la estimación de la posición al momento del arranque; el diseño se hace mediante el uso de la técnica de inyección de pulso para la operación con velocidad cero.

En (De La Guerra Carrasco, 2011) se reporta el único trabajo encontrado donde se aborda un análisis de observabilidad con características locales del motor de reluctancia en donde la representación matemática empleada no considera la

saturación y el único estado no medible es la velocidad angular. Así, mediante un método geométrico se concluye que el motor es localmente observable siempre que no se trabaje a velocidad cero.

En este trabajo se presenta un método para llevar a cabo un análisis de las propiedades de observabilidad global del motor de reluctancia conmutada sin considerar la saturación y sin medición de velocidad. Este análisis explota en un nivel fundamental el concepto de trayectorias indistinguibles es decir, las trayectorias internas de un sistema que son diferentes bajo el mismo comportamiento entrada/salida.

La principal contribución que se presenta en este trabajo es la declaración de un sistema dinámico cuyo comportamiento, llamado dinámica indistinguible, caracteriza todas las trayectorias que hacen no observable al motor de reluctancia conmutada. El análisis para este sistema, como es habitual con sistemas dinámicos no lineales, es complejo y no es posible presentar explícitamente todas las trayectorias mencionadas, sin embargo, es preciso señalar que incluso en estas condiciones varios resultados importantes pueden obtenerse con respecto a la dinámica indistinguible:

- Se puede proporcionar una respuesta formal a la pregunta fundamental acerca de la existencia de trayectorias indistinguibles para el SRM sin saturación.
- En caso de existir trayectorias indistinguibles, también existirían algunas trayectorias siempre divergentes con lo que se deduce que hay regímenes de operación para los que cualquier observador no converge, es decir, sería imposible construir un observador para toda trayectoria del motor.
- Si llegaran a existir dinámicas indistinguibles estas serían dependientes de la entrada, por lo tanto, el sistema no se podría descomponer en una parte observable y una no observable.
- Una vez que la estructura del sistema dinámico que genera la dinámica indistinguible esté a la mano, las herramientas estándar de análisis pueden ser aplicadas con el fin de obtener una comprensión más profunda sobre las propiedades de observabilidad del SRM.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección II se presenta el modelo matemático del SRM y algunas de sus propiedades. En la Sección III se presenta, de manera general, la metodología que se seguirá para hacer el análisis de observabilidad del SRM, el cual se presenta en la Sección IV. Para finalizar, en la Sección V se presentan las conclusiones del trabajo y algunos puntos indicativos del trabajo futuro.

II. MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA: CARACTERÍSTICAS Y MODELO

El SRM a diferencia de otros motores genera par a través de la variación de la reluctancia en lugar de la acción de inducción, esto es, el mecanismo de producción de par es idéntico al observado en el desplazamiento producido al alinear dos imanes con polaridad diferente, así, el par es producido por la propensión del rotor a moverse hacia la posición de mayor inductancia del estator, esto es, donde la reluctancia es mínima y de ahí el nombre de motor de reluctancia conmutada. La concentración de devanados en el estator y la ausencia de imanes permanentes o devanados en el rotor dan lugar a varias características interesantes: construcción simple, estructura sin

escobillas y mayor generación de par. Paradójicamente, la principal desventaja de este tipo de máquinas eléctricas viene, también, de su estructura simple, ya que para generar par, las corrientes de estator deben ser secuencialmente conmutadas encendido/apagado de acuerdo a la posición del rotor como se ejemplifica en la Figura 2 para un motor de tres fases.

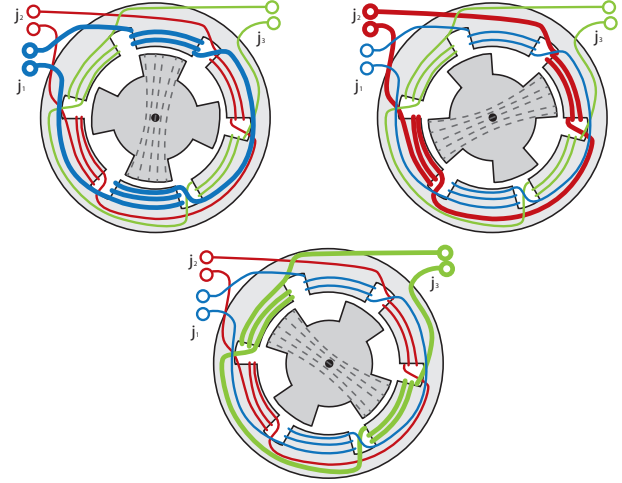


Figura 2. Secuencia de excitación de fases del SRM

La restricción, en el sentido de que las corrientes de estator deben ser encendidas y apagadas de acuerdo a la posición angular del rotor, asigna el requerimiento de la existencia de un conmutador electrónico con el fin de que la forma de onda requerida para las corrientes de estator sea garantizada. La función principal del conmutador es coordinar el proceso de conmutación además que debe garantizar una transición suave de acuerdo a las necesidades de operación (Wang y Lan, 2004).

El modelo descrito en el presente trabajo está basado en (Espinosa-Pérez *et al.*, 2002). Se considera que las fases del estator están desacopladas magnéticamente por lo que la inductancia mutua puede ser despreciada, sin pérdida de generalidad y por practicidad, se considera el caso de un motor trifásico. Bajo estas consideraciones, la dinámica del SRM es de la forma

$$\begin{aligned} u_j &= \dot{\psi}_j + r i_j; \quad j = 1, 2, 3 \\ J \ddot{\theta} &= T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) - T_L \end{aligned} \quad (1)$$

donde u_j es el voltaje aplicado a la j -ésima terminal de fase del estator, i_j es la j -ésima corriente de fase del estator, $\psi_j(\theta, i_j)$ es el flujo magnético de dispersión de la j -ésima fase, r es la resistencia de los devanados del estator, θ es la posición angular del rotor, T_L es el par de carga y J la inercia total del rotor. Es de notar que el par mecánico de origen eléctrico $T_e(\theta, i_1, i_2, i_3)$, depende tanto de la posición angular del rotor como de todas las corrientes del estator. Se asume que el flujo magnético de dispersión tiene la estructura

$$\psi_j(\theta, i_j) = L_j(\theta) i_j \quad (2)$$

donde la j -ésima inductancia de fase está dada por

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad (3)$$

en esta expresión l_0 y l_1 son constantes positivas tales que $l_0 > l_1$ haciendo de esta manera que la ecuación (3) sea definida positiva. Bajo estas condiciones el modelo (1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u_j &= L_j(\theta) \frac{di_j}{dt} + G_j(\theta) \omega i_j + r i_j; \quad j = 1, 2, 3 \\ J \dot{\omega} &= T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) - T_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$G_j(\theta) = \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta} = N_r l_1 \sin \left[N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5)$$

es la variación de la inductancia, por fase, con respecto a la posición angular.

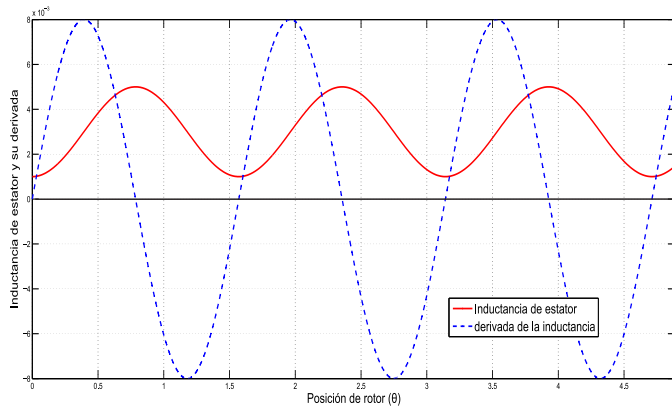


Figura 3. Inductancia de estator y su derivada respecto a la posición

Con base en las definiciones dadas en (3) y (5) el par mecánico de origen eléctrico es de la forma

$$T_e(\theta, i_1, i_2, i_3) = \sum_{j=1}^3 T_j(\theta, i_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} G_j(\theta) i_j^2 \quad (6)$$

donde se puede observar que el par de cada fase aparece como una función cuadrática de la corriente de fase respectiva y que su signo es determinado por la derivada parcial de la inductancia de fase con respecto a la posición del rotor, $G_j(\theta)$.

En la Figura 3 se muestra el comportamiento de la inductancia de estator y su respectiva deriva parcial respecto a la posición, contra la posición del rotor. En ella es posible observar que de acuerdo a la ecuación 6, se producirá par positivo en el área positiva de la gráfica de la función $G_j(\theta)$, esto es, en el perfil de subida de la curva de inductancia. Esta condición indica que las fases del estator deben ser conmutadas de manera secuencial atendiendo en todo momento a la posición del rotor. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 2 en donde se aprecia una secuencia $j_1 - j_2 - j_3 - j_1 - \dots$ para obtener un movimiento en sentido anti-horario.

III. METODOLOGÍA

La metodología que se presenta es obtenida de (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004).

Sea el sistema no lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u); \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (7)$$

donde $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida y f y h son funciones suficientemente suaves definidas en \mathbb{R}^{n+p} y \mathbb{R}^n respectivamente. La solución de (7) en $t \geq 0$ que pasa a través de x_0 en $t = 0$, correspondiendo la función de entrada $u \in \mathcal{U}$ (una clase de funciones de tiempo) es $x(t) = \phi(t, x_0, u)$. La salida esta dada por $y(t) = \lambda(t, x_0, u) = h(\phi(t, x_0, u))$.

Se considera un sistema dinámico de la forma (7) con las variables de entrada y salida (u, y) medibles y se asume que la estructura del sistema es conocida, incluyendo parámetros.

El fin de la metodología es determinar si es posible construir un modelo dinámico del error, a partir del sistema dado por (7), que proporcione las trayectorias indistinguibles del sistema original y de determinar si éstas son convergentes o no; de serlo, es posible observar el sistema, en caso contrario se puede concluir no observabilidad del sistema. En el caso de no encontrar trayectorias indistinguibles entonces se puede determinar que el sistema es globalmente observable.

Los pasos a seguir para emplear esta metodología son:

- Determinar un modelo dinámico del error que genere las trayectorias indistinguibles. En caso que las trayectorias sean las mismas trayectorias del sistema original se concluye observabilidad y no es necesario proceder al paso B.
- Determinar si las trayectorias indistinguibles son convergentes o no. Con el objeto de determinar observabilidad o no observabilidad; si existen trayectorias indistinguibles divergentes entonces ningún observador que se diseñe para el sistema podrá converger para toda trayectoria del sistema.

Para llevar a cabo el procedimiento de manera óptima es imprescindible el conocimiento los conceptos indistinguibilidad, observabilidad y detectabilidad obtenidos de (Hermann y Krener, 1977) e (Ibarra-Rojas *et al.*, 2004).

Definición 1: Considerando una entrada $u(\cdot)$ para el sistema (7) y una condición inicial $x^0 \in D_x$. Si otra condición inicial $x^1 \in D_x$ es tal que $y(t, x^0, u(\cdot)) = y(t, x^1, u(\cdot))$ para todo $t \in [0, T]$, para algún $T > 0$ entonces x^1 es un estado $u(\cdot)$ -indistinguible de x^0 en el intervalo $[0, T]$. El conjunto de todos los estados $u(\cdot)$ -indistinguibles de x^0 será denotado por $\mathcal{I}_{(u, x^0)}$.

Definición 2: El sistema (7) es observable en $x^0 \in D_x$ si $\mathcal{I}_{(u, x^0)} = \{x^0\}$ y el sistema (7) es observable si $\mathcal{I}_{(u, x)} = \{x\}$ para todo $x \in D_x$.

Definición 3: El sistema (7) es detectable si para cualquier $x^0 \in D_x$, y algún $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{x}, u(\cdot)) - x(t, x^0, u(\cdot))\| = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{I}_{(u, x^0)}$$

Considerando la Definición 1 y el modelo (7) se suponen dos sistemas dinámicos idénticos, mismo modelo y mismos

parámetros, considerando condiciones óptimas de operación para la observabilidad (si el sistema no es observable para estas condiciones mucho menos lo será para condiciones diferentes): parámetros bien conocidos, entrada medible, conocimiento de los estados medibles y los no medibles. Entonces se suponen los modelos Σ_1 y Σ_2 con condiciones iniciales diferentes

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1, u); & x_1(0) = x_{10} \\ y &= h(x_1) \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 &= f(x_2, u); & x_2(0) = x_{20} \\ y &= h(x_2) \end{cases}$$

Algunas hipótesis: ¿Que se podría esperar de las trayectorias de estado internas de estos dos sistemas?

1. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes para todo $t > 0$

Esto implica que existe indistinguibilidad debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se tienen estados internos diferentes. Esta condición de es provocada por la entrada $u(\cdot)$ y de aquí el nombre de u -indistinguible de la Definición 1, además, esta condición de indistinguibilidad provoca que el sistema no sea observable.

2. Que las trayectorias de estados internos sean diferentes pero que converjan entre si cuando $t \rightarrow \infty$

En este caso también existe indistinguibilidad, pero cuando $t \rightarrow \infty$ está se pierde, lo cual implica que el sistema es detectable.

3. Que las trayectorias de estados internos sean idénticas para todo $t \rightarrow \infty$

Esto implica que no existe indistinguibilidad debido a que con las mismas condiciones de entrada-salida se muestran idénticas trayectorias internas del sistema. Esto permite determinar que el sistemas es observable globalmente.

Es preciso obtener un modelo dinámico de error del sistema a través de la diferencia de los modelos esto es

$$\Xi = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

por tanto es necesario asignar también variables (estados) de error para cada estado las cuales representaran las trayectorias del modelo dinámico de error, esto es:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= x_{11} - x_{21} \Rightarrow \frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{x_{11}}{dt} - \frac{dx_{21}}{dt} \\ \epsilon_2 &= x_{12} - x_{22} \Rightarrow \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{x_{12}}{dt} - \frac{dx_{22}}{dt} \\ &\vdots \\ \epsilon_n &= x_{1n} - x_{2n} \Rightarrow \frac{d\epsilon_n}{dt} = \frac{x_{1n}}{dt} - \frac{dx_{2n}}{dt} \end{aligned}$$

obtenido el modelo de error, se igualan las condiciones iniciales de todos los estados conocidos del sistema, esto es:

$$x_1 = x_{11} = x_{21} \Rightarrow \epsilon_1 = 0; \quad \frac{d\epsilon_1}{dt} = 0$$

mientras que las condiciones iniciales de los estados no medibles no se cambian.

Ahora, se prosigue a encontrar un conjunto de ecuaciones llamado dinámica indistinguible vista como la conexión en cascada de (7) y Ξ . Cabe remarcar que esta dinámica indistinguible tiene naturaleza global, ya que este representa todas las trayectorias indistinguibles del sistema.

$$DI : \begin{cases} \Sigma \\ \Xi \end{cases}$$

Repasando las hipótesis planteadas llega al momento de establecer, de acuerdo a la dinámica indistinguible, el comportamiento de las trayectorias.

IV. DINÁMICA INDISTINGUIBLE DEL MOTOR DE RELUCTANCIA CONMUTADA

Considerando la metodología anterior es posible obtener un modelo dinámico de error utilizando el modelo (3) considerando las condiciones apropiadas de operación para la observabilidad, esto es, parámetros del motor conocidos, u, T_L, i, θ son señales medibles y ω la señal no medible. Haciendo uso del sistema (3) sustituyendo los respectivos valores de $L_j(\theta)$, $G_j(\theta)$ y $T_e(\theta, i_j)$ se obtiene:

$$\Omega : \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2)] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta) \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{cases}$$

Tomando como partida dos motores idénticos y sus modelos dinámicos con condiciones iniciales arbitrarias

$$\Omega_a : \begin{cases} \frac{d\omega_a}{dt} &= \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2)] - \frac{T_L}{J}, \\ &\omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} &= \omega_a, \\ &\theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ &i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ &i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \\ &i_{3a}(0) = i_{30a} \end{cases}$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \frac{d\omega_b}{dt} &= \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 + \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2)] - \frac{T_L}{J}, \\ &\omega_b(0) = \omega_{0b} \\ \frac{d\theta_b}{dt} &= \omega_b, \\ &\theta_b(0) = \theta_{0b} \\ \frac{di_{1b}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} - r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)}, \\ &i_{1b}(0) = i_{10b} \\ \frac{di_{2b}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} - r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3})}, \\ &i_{2b}(0) = i_{20b} \\ \frac{di_{3b}}{dt} &= \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} - r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3})}, \\ &i_{3b}(0) = i_{30b} \end{cases}$$

Se definen variables de error las cuales corresponden a la diferencia entre las dinámicas de los motores Ω_a y Ω_b

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_a - \omega_b \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega_a}{dt} - \frac{d\omega_b}{dt} \\ \Delta &= \theta_a - \theta_b \Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} = \frac{d\theta_a}{dt} - \frac{d\theta_b}{dt} \\ e &= i_a - i_b \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt} \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones de Ω_a y las obtenidas a través de las variables de error se obtiene el modelo de error del motor de reluctancia conmutada

$$\Omega_a : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2)] - \frac{T_L}{J}, \\ \omega_a(0) = \omega_{0a} \\ \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \\ \theta_a(0) = \theta_{0a} \\ \frac{di_{1a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} - r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)}, \\ i_{1a}(0) = i_{10a} \\ \frac{di_{2a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} - r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{2a}(0) = i_{20a} \\ \frac{di_{3a}}{dt} = \frac{u - N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} - r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3})}, \\ i_{3a}(0) = i_{30a} \end{array} \right.$$

$$E : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [\sin(N_r \theta_a) i_{1a}^2 - \sin(N_r \theta_b) i_{1b}^2 + \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) i_{2a}^2 - \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) i_{2b}^2 + \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) i_{3a}^2 - \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) i_{3b}^2] \\ \varepsilon(0) = \omega_{0a} - \omega_{0b} \\ \frac{d\Delta}{dt} = \omega_a - \omega_b \\ \Delta(0) = \theta_{0a} - \theta_{0b} \\ \frac{de_1}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b) \omega_b i_{1b} + r i_{1b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a) \omega_a i_{1a} + r i_{1a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_1(0) = i_{10a} - i_{10b} \\ \frac{de_2}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b - \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{2b} + r i_{2b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a - \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{2a} + r i_{2a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_2(0) = i_{20a} - i_{20b} \\ \frac{de_3}{dt} = \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_b + \frac{2\pi}{3}) \omega_b i_{3b} + r i_{3b}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_b)} - \frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta_a + \frac{2\pi}{3}) \omega_a i_{3a} + r i_{3a}}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta_a)} \\ e_3(0) = i_{30a} - i_{30b} \end{array} \right.$$

Tomando en cuenta el modelo de error encontrado, es posible obtener el conjunto llamado dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada. Para lo que es necesario tomar en cuenta las condiciones de indistinguibilidad del motor, esto es, entradas $u(\cdot)$ y par de carga T_L iguales para ambos motores Ω_a y Ω_b , y un conjunto de condiciones iniciales tales que la salida de ambos motores sea igual: $i_j = i_{aj} = i_{bj}$ y $\theta = \theta_a = \theta_b$ para todo $t \geq 0$.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores es posible mostrar que

$$e_j = 0, \quad \frac{de_j}{dt} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

por tanto la dinámica indistinguible del motor de reluctancia conmutada queda

$$DI : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{N_r l_1}{J} [(\sin(N_r \theta) i_1^2 + \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) i_2^2 + \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) i_3^2)] - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta)] \omega i_1 - r i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})] \omega i_2 - r i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{u - [N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})] \omega i_3 - r i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \\ 0 = \varepsilon \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta) \varepsilon i_1}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta)} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta - \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_2}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta - \frac{2\pi}{3})} \\ 0 = -\frac{N_r l_1 \sin(N_r \theta + \frac{2\pi}{3}) \varepsilon i_3}{l_0 - l_1 \cos(N_r \theta + \frac{2\pi}{3})} \end{array} \right.$$

Observando el modelo dinámico del error, se aprecia que su primera ecuación tiene, en su parte derecha, solo variables conocidas por lo cual en la sexta ecuación de la dinámica indistinguible la derivada temporal de ε se iguala a cero. En

la séptima ecuación de la dinámica indistinguible, $0 = \varepsilon$, se tiene el resultado favorable para el análisis ya que muestra que la diferencia de las velocidades es cero, lo que implica que ω_a y ω_b son iguales y por tanto no existen dos trayectorias de ω diferentes con entrada $u(\cdot)$. Con este resultado se tiene a las trayectorias propias del sistema del SRM como soluciones de la dinámica indistinguible ya que estas satisfacen, al mismo tiempo, el propio sistema del SRM como el modelo dinámico del error y esto se aprecia en las tres últimas ecuaciones de la dinámica indistinguible; donde no importa que valores tomen θ, i_1, i_2 e i_3 por que $\varepsilon = 0$ las satisface.

Por tanto el conjunto de todas las trayectorias indistinguibles del modelo dinámico del SRM queda

$$\mathcal{I}_{(u, \omega, \theta, i_1, i_2, i_3)} = \{\omega, \theta, i_1, i_2, i_3\}$$

V. CONCLUSIONES

Se formuló un modelo dinámico de error haciendo uso de la comparación entre dos sistemas dinámicos idénticos, bajo ciertas condiciones de trabajo del motor, esto es, considerando que las fases de estator están desacopladas magnéticamente, despreciando el fenómeno de saturación en las bobinas y estableciendo como estados medibles las corrientes de estator y la posición del rotor se determinó la existencia del modelo de ecuaciones álgebra-diferenciales de donde procede la dinámica indistinguible del SRM que a la vez proporciona el resultado principal del análisis: existencia de observabilidad global para el motor de reluctancia conmutada basado en la Definición 2:

$$\varepsilon = \omega_a - \omega_b = 0 \Rightarrow \mathcal{I}_{(u, \omega)} = \{\omega\}$$

esto es, el error de velocidades igual a cero hace que el conjunto de todas las dinámicas indistinguibles del SRM sea el mismo estado.

Como extensiones de este trabajo pueden considerarse dos casos 1) determinar la observabilidad global considerando la dinámica completa del SRM, esto es, tomando en cuenta la saturación y 2) considerando como únicos estados medibles las corrientes de estator.

REFERENCIAS

- De La Guerra Carrasco, Alejandra Icxih (2011). Observabilidad de motores de reluctancia conmutada. Tesis de maestría.
- Ehsani, M. y B. Fahimi (2002). Elimination of position sensors in switched reluctance motor drives: state of the art and future trends. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **49**(1), 40–47.
- Espinosa-Pérez, G., P. Maya-Ortiz, M. Velasco-Villa y H. Sira-Ramírez (2002). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetic circuits. En: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*. Vol. 1. pp. 468–473.
- Gao, Hongwei, F.R. Salmasi y M. Ehsani (2004). Inductance model-based sensorless control of the switched reluctance motor drive at low speed. *Power Electronics, IEEE Transactions on* **19**(6), 1568–1573.
- Hermann, R. y A. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **22**(5), 728–740.
- Ibarra-Rojas, Sebastian, Jaime Moreno y Gerardo Espinosa-Pérez (2004). Global observability analysis of sensorless induction motors. *Automatica* **40**(6), 1079–1085.
- Komatsuzaki, A., T. Bamba y I. Miki (2008). A position estimation for switched reluctance motor at standstill. En: *Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, 2008. SPEEDAM 2008. International Symposium on*. pp. 290–295.
- Krishnan, R. (2001). *Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design, and applications*. Industrial electronics series.
- Miller, T.J.E. (2001). *Electronic Control of Switched Reluctance Machines*. Newnes Power Engineering Series.

- Tan, Guojun, Zhenglan Ma, Songyan Kuai y Xulong Zhang (2009). Four-quadrant position sensorless control in switched reluctance motor drives based on sliding mode observer. En: *Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on*. pp. 1 –5.
- Wang, Shun-Chung y Wen-Han Lan (2004). Turn-on angle searching strategy for optimized efficiency drive of switched reluctance motors. En: *Industrial Electronics Society, 2004. IECON 2004. 30th Annual Conference of IEEE*. Vol. 2. pp. 1873 – 1878 Vol. 2.